14.2. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Линейным неоднородным дифференциальным уравнением (ЛНДУ) с постоянными коэффициентами называется уравнение вида:

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + ... + p_{n-1} y' + p_n y = f(x), \qquad (1)$$

где $p_i = const \ (\overline{1,n})$.

Теорема. *Общее решение y линейного неоднородного дифференциального уравнения равно сумме общего решения $\bar{y}$ соответствующего однородного уравнения, получающегося из неоднородного при $f(x) = 0$, и какого-либо его частного решения y^*, то есть $y = \bar{y} + y^*$.*

Рассмотрим способы нахождения частных решений ЛНДУ с правой частью специального вида на примере ЛНДУ второго порядка с постоянными коэффициентами, которое имеет вид:

$$y'' + py' + qy = f(x), \qquad (2)$$

где p и q – некоторые числа.

При подборе частного решения неоднородного уравнения по виду правой части $f(x)$ и корней k_1, k_2 характеристического уравнения $k^2 + pk + q = 0$ удобно пользоваться следующими правилами.

Правило I.

Если $f(x) = P_n(x)$, где $P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_n$ - многочлен степени n, то $y^* = x^r Q_n(x)$, где $Q_n(x)$ - многочлен степени n, записаный в общем виде, при этом:

$$\begin{cases} r = 0, \text{ если } k_1 \neq 0, \ k_2 \neq 0; \\ r = 1, \text{ если } k_1 = 0, \ k_2 \neq 0; \\ r = 2, \text{ если } k_1 = k_2 = 0. \end{cases}$$

Правило II.

Если $f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$, где $P_n(x)$ - многочлен степени n, то $y^* = e^{\alpha x} x^r Q_n(x)$, где $Q_n(x)$ - многочлен степени n, записаный в общем виде, при этом:

$$\begin{cases} r=0, \text{ если } \alpha \neq k_1 \text{ и } \alpha \neq k_2; \\ r=1, \text{ если } \alpha = k_1 \text{ и } \alpha \neq k_2; \\ r=2, \text{ если } \alpha = k_1 = k_2, \end{cases}$$

где k_1 и k_2 - корни характеристического уравнения.

Правило III.

Если $f(x) = e^{\alpha x}[P_n(x)\cos\beta x + P_m(x)\sin\beta x]$, где $P_n(x)$ и $P_m(x)$ - многочлены степени n и m, то $y^* = e^{\alpha x}x^r[Q_s(x)\cos\beta x + R_s(x)\sin\beta x]$, где $Q_s(x)$ и $R_s(x)$ - многочлены степени $s = \max\{n,\ m\}$, записаные в общем виде, при этом:

$$\begin{cases} r=0, \text{ если } \alpha+\beta i \neq k_1 \text{ и } \alpha+\beta i \neq k_2; \\ r=1, \text{ если } \alpha+\beta i = k_1 \text{ или } \alpha+\beta i = k_2. \end{cases}$$

Пример 1. Решить дифференциальное уравнение

$$y'' + y' - 2y = x^2 + 1.$$

1. Найдем общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения

$$y'' + y' - 2y = 0, \quad k^2 + k - 2 = 0, \quad k_1 = -2,\ k_2 = 1,$$

тогда

$$\bar{y} = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x.$$

2. Найдем частное решение неоднородного дифференциального уравнения. Так как правая часть уравнения $f(x) = x^2 + 1$ - многочлен 2-ой степени, то

$$y^* = x^r(ax^2 + bx + c).$$

Так как $k_1 \neq 0,\ k_2 \neq 0$, то $r = 0$ (правило I).

Получаем

$$y^* = x^0(ax^2 + bx + c),\ \ y^* = ax^2 + bx + c.$$

Находим производные

$$(y^*)' = 2ax + b, \;\; (y^*)'' = 2a$$

и подставляем в исходное дифференциальное уравнение.

Получаем
$y'' + y' - 2y = x^2 + 1,$
$2a + 2ax + b - 2(ax^2 + bx + c) = x^2 + 1,$
$(-2a)x^2 + (2a - 2b)x + (2a + b - 2c) = x^2 + 1.$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, имеем

$$-2a = 1, \quad 2a - 2b = 0, \quad 2a + b - 2c = 1.$$

Отсюда $a = -\dfrac{1}{2}$, $b = -\dfrac{1}{2}$, $c = -\dfrac{5}{4}$.

Получаем искомое частное решение

$$y^* = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{5}{4}.$$

3. Запишем общее решение уравнения:

$$y = \bar{y} + y^*, \quad y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{x} - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{5}{4}.$$

Пример 2. Решить дифференциальное уравнение

$$y'' - 2y' - 3y = e^{4x}(x - 1).$$

1. Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y'' - 2y' - 3y = 0, \;\; k^2 - 2k - 3 = 0, \;\; k_1 = 3, \; k_2 = -1,$$

тогда

$$\bar{y} = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x}.$$

2. Найдем частное решение неоднородного дифференциального уравнения. Так как правая часть уравнения $f(x) = e^{4x}(x - 1)$, то

$$y^* = e^{4x} x^r (ax + b).$$

Поскольку $\alpha = 4$ ($\alpha \neq k_1 = 3$ и $\alpha \neq k_2 = -1$), получаем $r = 0$ (правило II).

Тогда

$$y^* = e^{4x}(ax+b).$$

Находим производные

$$(y^*)' = e^{4x}(4ax+4b+a),\;\; (y^*)'' = 8e^{4x}(2ax+2b+a)$$

и подставляем в исходное дифференциальное уравнение.

Получаем

$y''-2y'-3y = e^{4x}(x-1),$

$8e^{4x}(2ax+2b+a)-2e^{4x}(4ax+4b+a)-3e^{4x}(ax+b) = e^{4x}(x-1),$

$e^{4x}(16ax+16b+8a-8ax-8b-2a-3ax-3b) = e^{4x}(x-1),$

$5ax+5b+6a = x-1\,.$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, имеем

$$5a = 1, \quad 5b+6a = -1.$$

Отсюда $a = \dfrac{1}{5}\,,\; b = -\dfrac{11}{25}\,.$

Получаем искомое частное решение

$$y^* = \frac{1}{5}x - \frac{11}{25}.$$

3. Запишем общее решение уравнения:

$$y = \bar{y} + y^*, \quad y = C_1e^{3x} + C_2e^{-x} + e^{4x}\left(\frac{1}{5}x - \frac{11}{25}\right).$$

Пример 3. Решить дифференциальное уравнение

$$y''+3y'+2y = 4\sin 3x + 2\cos 3x. \qquad (3)$$

Решение. 1. Корнями характеристического уравнения $k^2+3k+2=0$ будут $k_1=-2\,,k_2=-1\,.$ Следовательно, общее решение соответствующего однородного уравнения

$$\bar{y} = C_1e^{-2x} + C_2e^{-x}.$$

2. Число $\beta\,i = 3i$ не является корнем характеристического уравнения, поэтому частное решение y^* неоднородного дифференциального уравнения (3) будем искать в виде $y^* = A\sin 3x + B\cos 3x$ (правило III).

Найдем коэффициенты A, B.

Имеем

$$(y^*)' = 3A\cos 3x - 3B\sin 3x, \quad (y^*)'' = -9A\sin 3x - 9B\cos 3x. \qquad (4)$$

Подставив равенства (4) в уравнение (3), получим $-9A\sin 3x - 9B\cos 3x + 9A\cos 3x - 9B\sin 3x + 2A\sin 3x + 2B\cos 3x = = 4\sin 3x + 2\cos 3x$ или

$$\sin 3x(-7A - 9B) + \cos 3x(9A - 7B) = 4\sin 3x + 2\cos 3x.$$

Приравнивая коэффициенты при $\sin 3x$ и $\cos 3x$, получим следующую систему уравнений $-7A - 9B = 4$; $9A - 7B = 2$, откуда $A = -1/13$, $B = -5/13$. Следовательно, $y^* = -\dfrac{1}{13}\sin 3x - \dfrac{5}{13}\cos 3x$.

3. Общим решением уравнения (3) будет являться функция

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x} - \frac{1}{13}\sin 3x - \frac{5}{13}\cos 3x.$$