Глава 1

«Сэкономленный доллар – заработанный доллар»: Об инвестициях и сбережениях

1.2 Денежный поток, аннуитет

Денежный поток

Денежный поток – это распределенная во времени последовательность выплат и поступлений денежных средств, генерируемая некоторым активом или инвестиционным проектом.

Получаемые платежи или поступления называют **притоками денежных средств**, выплачиваемые – **оттоками**.

Момент поступлений/оттоков денежных средств называется **временным интервалом.**

Денежный поток, в котором поступления (или оттоки) происходят в начале каждого временного периода, называется потоком **пренумерандо**. Поток, поступления (или оттоки) которого происходят в конце периода, – потоком **постнумерандо**.

Графически вышеназванные денежные потоки представлены на рис. 1.

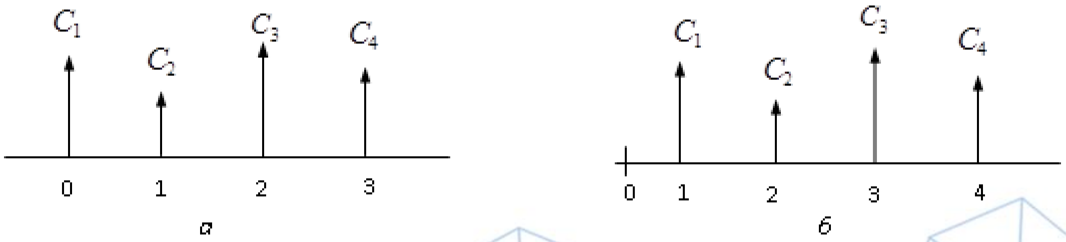

Рисунок 1. Денежные потоки пренумерандо (а) и постнумерандо (б)

Денежный поток

Оценка денежного потока может выполняться в рамках решения двух задач – **прямой и обратной.**

Прямая задача – это суммарная оценка наращенного денежного потока с позиции его будущей стоимости.

Обратная задача предполагает суммарную оценку дисконтированного денежного потока, т.е. приведение сумм из будущего времени к настоящему периоду (позволяет оценить текущую стоимость будущего денежного потока).

Обозначения:

r – годовая процентная ставка (начисляется один раз за год),
n – базовый период поступления (или оттока) капитала, равен одному году,
m – количество начислений процентов внутри базового периода (например, если проценты начисляются ежеквартально, то m=4).

Оценка потока постнумерандо

Прямая задача оценки потока постнумерандо представляет собой оценку денежного потока $C_1, C_2, \ldots, C_n$, период которого совпадает с базовым периодом начисления процентов по ставке r, на конец периода n, когда реализуется схема наращения (рис. 2).

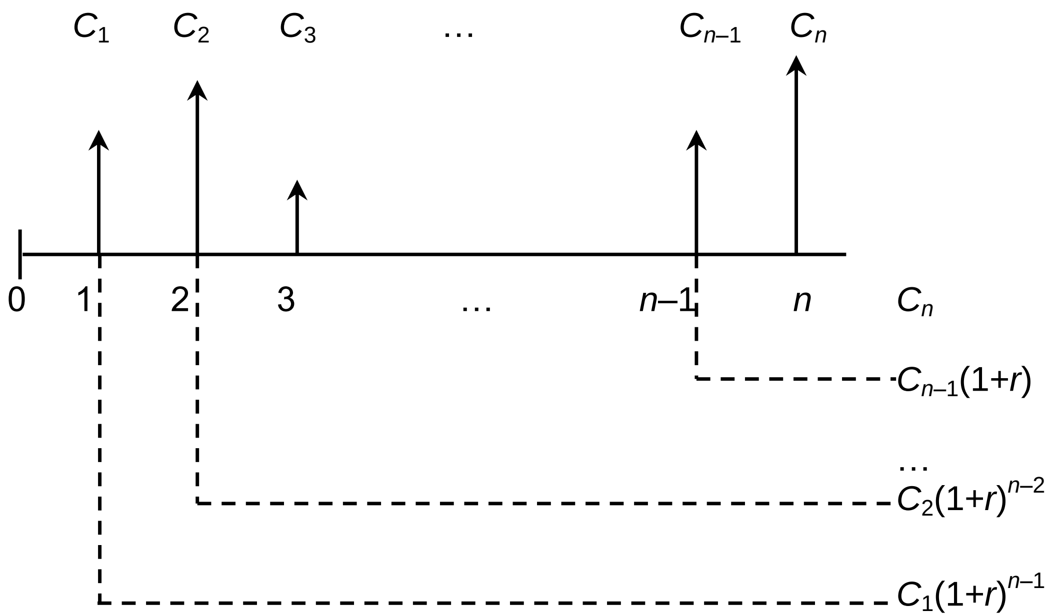

Рисунок 2. Логика решения прямой задачи для потока постнумерандо

Оценка потока постнумерандо

На первое денежное поступление C_1 начисляются сложные проценты за $(n-1)$ период, и оно в конце n-го периода станет равным $C_1(1+r)^{n-1}$. На второе денежное поступление C_2 начисляются сложные проценты за $(n-2)$ периода, и оно станет равным $C_2(1+r)^{n-2}$ и т. д. На предпоследнее денежное поступление C_{n-1} проценты начисляются за один период, и оно будет в конце n-го периода равно $C_{n-1}(1+r)$. Естественно, на денежный поток C_n проценты не начисляются.

Следовательно, будущая стоимость FV_{pst} исходного денежного потока постнумерандо может быть оценена как сумма наращенных поступлений, т. е. по формуле:

$$FV_{pst} = \sum_{k=1}^{n} C_k \left(1+r\right)^{n-k}. \qquad \textbf{(1)}$$

Оценка потока постнумерандо

Обратная задача подразумевает оценку с позиции текущего момента, т. е. на момент начала первого периода. В этом случае реализуется схема дисконтирования и расчеты необходимо вести по приведенному потоку, все элементы которого с помощью дисконтных множителей приведены к настоящему моменту времени. Элементы приведенного денежного потока уже можно суммировать; их сумма характеризует приведенную, или текущую, стоимость потока, которую при необходимости можно сравнивать с величиной первоначальной инвестиции.

Схема дисконтирования для исходного потока представлена на рис. 3.

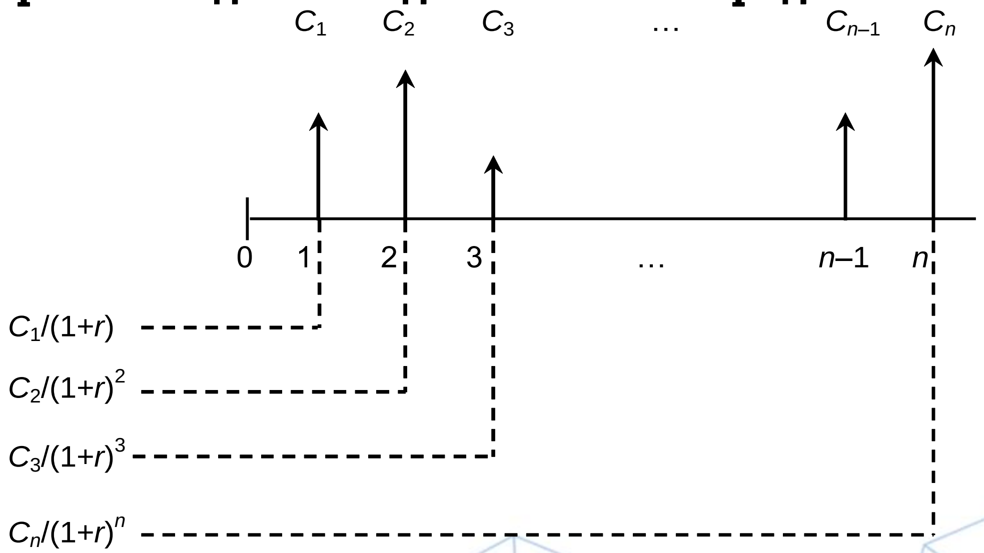

Рис. 3 – Логика решения обратной задачи для потока постнумерандо

Оценка потока постнумерандо

Приведенная стоимость денежного потока постнумерандо PV_{pst} в общем случае может быть рассчитана по формуле:

$$PV_{pst} = \sum_{k=1}^{n} \frac{C_k}{(1+r)^k} \qquad \textbf{(2)}$$

Оценка потока постнумерандо

Пример 1

Рассчитать приведенную стоимость денежного потока постнумерандо в тыс. руб. (10, 15, 18, 25), если процентная ставка *r* составляет 10% и период равен одному году.

Решение

Результаты расчета представим в виде таблицы.

Год	Денежный поток, тыс. руб.	Дисконтный множитель при r = 10%	Приведенный поток, тыс. руб.
1	10	0,909091	9,09
2	15	0,826446	12,39
3	18	0,751315	13,52
4	25	0,683013	17,07
ИТОГО	68		52,08

Постоянный аннуитет

Денежный поток с равными по величине временными интервалами поступления или оттоков капитала называется финансовой рентой, или **АННУИТЕТОМ**.

Аннуитет называется **постоянным**, если все денежные поступления равны между собой ($C_1 = C_2 = \ldots = C_n = A$). В зависимости от характера денежных поступлений (в начале или конце периода) выделяют виды аннуитетов: пронумерандо и постнумерандо (рис. 4).

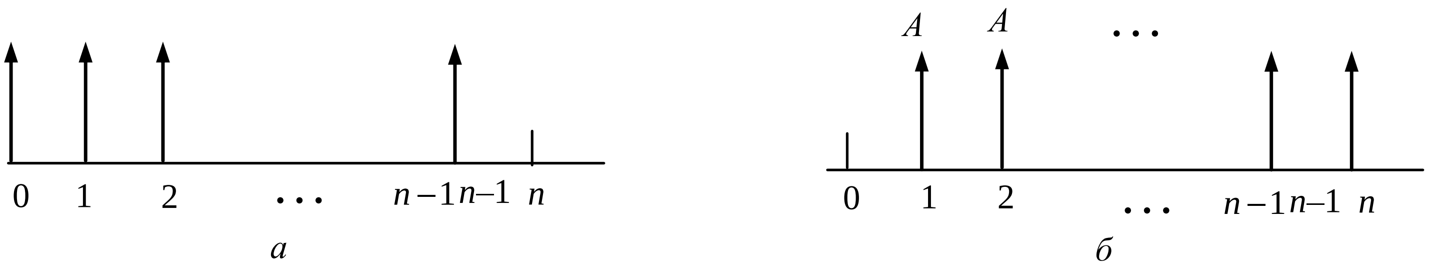

Рисунок 4. Виды постоянных аннуитетов: пренумерандо (а) и постнумерандо (б)

Постоянный аннуитет

Оценка будущей стоимости постоянного аннуитета постнумерандо, платежи которого равны *A*, продолжительность аннуитета составляет *n* периодов и на каждый платеж один раз в конце каждого базового периода начисляются сложные проценты по ставке *r*, проводится по формуле:

$$FV_{pst} = A\sum_{k=1}^{n}(1+r)^{n-k} = A\cdot\frac{(1+r)^n - 1}{r}. \qquad (3)$$

Постоянный аннуитет

Оценка приведенной стоимости постоянного аннуитета постнумерандо, платежи которого равны *A*, продолжительность аннуитета составляет *n* периодов и на каждый платеж один раз в конце каждого базового периода начисляются сложные проценты по ставке *r*, проводится по формуле:

$$PV_{pst} = A\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(1+r)^k} = A \cdot \frac{1-(1+r)^{-n}}{r}. \quad \textbf{(4)}$$

Постоянный аннуитет

Если в течение базового периода (равен 1 году) денежные поступления (или оттоки) происходят *p* раз и проценты начисляются *m* раз за период, оценка аннуитета постнумерандо производится по формулам:

$$FV_{pst} = A\frac{(1+\frac{r}{m})^{m\cdot n} - 1}{(1+\frac{r}{m})^{m/p} - 1}, \qquad \textbf{(5)}$$

$$PV_{pst} = A\frac{1-(1+\frac{r}{m})^{-n\cdot m}}{(1+\frac{r}{m})^{m/p} - 1}. \qquad \textbf{(6)}$$

Постоянный аннуитет

Пример 2

Компания гарантирует выплату дивидендов по акциям в размере 10 тыс. руб. в конце каждого квартала. Определить возможные суммы, которые можно накопить за 5 лет, если дивиденды вкладывать в банк под сложную процентную ставку 12% годовых с начислением процентов 1) ежегодно; 2) ежеквартально; 3)ежемесячно.

Решение

1. Используем формулу (5) при A = 10; n = 5; r = 12%; m = 1; p = 4:

$$FV = 10 \cdot \frac{(1+\frac{0,12}{1})^{1 \cdot 5} - 1}{(1+\frac{0,12}{1})^{1/4} - 1} = 265,279.$$

За 5 лет можно накопить 265 279 руб.

2. При A = 10; n = 5; r = 12%; m = 4; p = 4:

$$FV = 10 \cdot \frac{(1+\frac{0,12}{4})^{4 \cdot 5} - 1}{(1+\frac{0,12}{4})^{4/4} - 1} = 268,704.$$

За 5 лет можно накопить 268 704 руб.

3. При A = 10; n = 5; r = 12%; m = 12; p = 4:

$$FV = 10 \cdot \frac{(1+\frac{0,12}{12})^{12 \cdot 5} - 1}{(1+\frac{0,12}{12})^{12/4} - 1} = 269,528.$$

За 5 лет можно накопить 269 528 руб.

Постоянный аннуитет

Пример 3

Какую сумму необходимо поместить в банк под сложную процентную ставку 24% годовых, чтобы в течение 10 лет иметь возможность в конце каждого года снимать со счета 100 тыс. руб., исчерпав счет полностью, если банком начисляются сложные проценты 1) ежегодно; 2) ежеквартально; 3) ежемесячно?

Решение

Для ответа на поставленный вопрос во всех случаях необходимо определить приведенную стоимость аннуитета постнумерандо.

1. По формуле (6) при $A = 100$; $r = 24\%$; $n = 10$, $m = 1$, $p = 1$: $PV_{pst} = 100 \cdot \dfrac{1-(1+\frac{0{,}24}{1})^{-10\cdot 1}}{(1+\frac{0{,}24}{1})^{1/1}-1}$ = 368 185,6 руб.

   В банк на счет необходимо положить 368 185,6 руб.

2. При $A = 100$; $r = 24\%$; $n = 10$; $p = 1$; $m = 4$: $PV_{pst} = 100 \cdot \dfrac{1-(1+\frac{0{,}24}{4})^{-10\cdot 4}}{(1+\frac{0{,}24}{4})^{4/1}-1}$ = 343 945,6 руб.

   В банк на счет необходимо положить 343 945, 6 руб.

3. При $A = 100$; $r = 24\%$; $n = 10$; $p = 1$; $m = 12$: $PV_{pst} = 100 \cdot \dfrac{1-(1+\frac{0{,}24}{12})^{-10\cdot 12}}{(1+\frac{0{,}24}{12})^{12/1}-1}$ = 338 167,95 руб.

   В банк на счет необходимо положить 338 167, 95 руб.

Переменный аннуитет

Переменный аннуитет. Аннуитет называется переменным, если его члены различны по величине.

Для оценки переменного аннуитета используют общие формулы оценки денежного потока. Если члены аннуитета изменяются в соответствии с некоторыми законами (в частности, образуют арифметическую или геометрическую прогрессию), то общие формулы для определения будущей или приведенной стоимости аннуитета можно упростить.

Пусть платежи аннуитета образуют арифметическую прогрессию, т. е. изменяются на постоянную абсолютную величину z и представляют собой последовательность:

$$A, A + z, A + 2z, A + 3z \ldots A + (n - 3)z, A + (n - 2)z, A + (n - 1)z.$$

Если z является положительной величиной, то платежи аннуитета возрастают. Если z является отрицательной величиной, то величина z и величина n (количество периодов аннуитета) связаны между собой соотношением:

$$A - z(n-1) > 0, \quad \text{откуда} \quad \frac{A}{z} + 1 > n.$$

Переменный аннуитет

Формула для вычисления будущей стоимости аннуитета постнумерандо:

$$FV_{pst} = (A + \frac{z}{r}) \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r} - \frac{zn}{r}. \qquad (7)$$

Формула для вычисления приведенной стоимости аннуитета постнумерандо:

$$PV_{pst} = (A + \frac{z}{r}) \cdot \frac{1-(1+r)^{-n}}{r} - \frac{zn}{r(1+r)^n}. \qquad (8)$$

Переменный аннуитет

Пусть платежи аннуитета образуют геометрическую прогрессию с первым членом *A* и знаменателем *x*. То есть все платежи изменяются на одну и ту же относительную величину *x* и составляют ряд:

$$A, A\cdot x, A\cdot x^2, A\cdot x^3, \ldots . A\cdot x^{n-2}, A\cdot x^{n-1}.$$

Формулы для оценки переменного аннуитета постнумерандо, платежи которого образуют геометрическую прогрессию с первым членом *A* и знаменателем *x*:

$$FV_{pst} = A\frac{x^n-(1+r)^n}{x-(1+r)}; \qquad \textbf{(9)}$$

$$PV_{pst} = \frac{A}{(1+r)^n}\cdot\frac{x^n-(1+r)^n}{x-(1+r)}. \qquad \textbf{(10)}$$

Переменный аннуитет

Пример 4

Согласно условиям финансового соглашения на счет в банке в течение 8 лет в конце года будут поступать денежные суммы, первая из которых равна 4 тыс. долл., а каждая следующая будет увеличиваться на 0,5 тыс. долл. Оцените этот аннуитет, если банк применяет процентную ставку 10% годовых и сложные проценты начисляются один раз в конце года. Как изменятся оценки аннуитета, если денежные суммы будут уменьшаться на 0,5 тыс. долл.?

Решение

По условию задачи имеем переменный аннуитет постнумерандо с постоянным абсолютным изменением его членов.
Для оценки аннуитета воспользуемся формулами (7) и (8) при $A = 4000$; $n = 8$; $r = 0{,}1$; $z = 500$.

$$FV_{pst} = (4\ 000 + \frac{500}{0{,}1}) \cdot \frac{(1+0{,}1)^8 - 1}{0{,}1} - \frac{500 \cdot 8}{0{,}1} = 62\ 923.$$

Будущая стоимость аннуитета постнумерандо при условии, что денежные суммы будут увеличиваться, составит 62 923 долл.

Переменный аннуитет

Решение (продолжение)

$$PV_{pst} = (4\ 000 + \frac{500}{0,1}) \cdot \frac{1-(1+0,1)^{-8}}{0,1} - \frac{500 \cdot 8}{0,1 \cdot (1+0,1)^{8}} = 29\ 354.$$

Приведенная стоимость аннуитета постнумерандо при условии, что денежные суммы будут увеличиваться, составит 29 354 долл.

Если суммы будут уменьшаться, то $z = -500$ и, следовательно, по формулам (8) и (9) получаем:

$$FV_{pst} = (4\ 000 - \frac{500}{0,1}) \cdot \frac{(1+0,1)^{8}-1}{0,1} + \frac{500 \cdot 8}{0,1} = 28\ 564$$

Будущая стоимость аннуитета постнумерандо при условии, что денежные суммы будут уменьшаться, составит 28 564 долл.

$$PV_{pst} = (4\ 000 - \frac{500}{0,1}) \cdot \frac{1-(1+0,1)^{-8}}{0,1} + \frac{500 \cdot 8}{0,1 \cdot (1+0,1)^{8}} = 13\ 325.$$

Приведенная стоимость аннуитета постнумерандо при условии, что денежные суммы будут уменьшаться, составит 13 325 долл.

Метод депозитной книжки

Рассмотрим методы погашения ссуды, выданной под сложный ссудный процент, начисляемый на непогашенный остаток ссуды. Ссуда погашается равными годовыми платежами, поэтому при вычислении платежей можно использовать формулы для аннуитетов. Погашение исходного долга осуществляется постепенно в течение всего срока действия аннуитета. Структура годового платежа постоянно меняется – в начальные периоды в нем преобладают начисленные за очередной период проценты; с течением времени доля процентных платежей постоянно уменьшается и повышается доля погашаемой части основного долга.

Пример 5

В банке получена ссуда на пять лет в сумме 20 000 долл. под 13% годовых, начисляемых по схеме сложных процентов на непогашенный остаток. Возвращать нужно равными суммами в конце каждого года. Требуется определить величину годового платежа.

Метод депозитной книжки

Решение

Если обозначить за *A* величину искомого годового платежа, то данный финансовый контракт можно представить в виде следующей схемы (рис. 5).

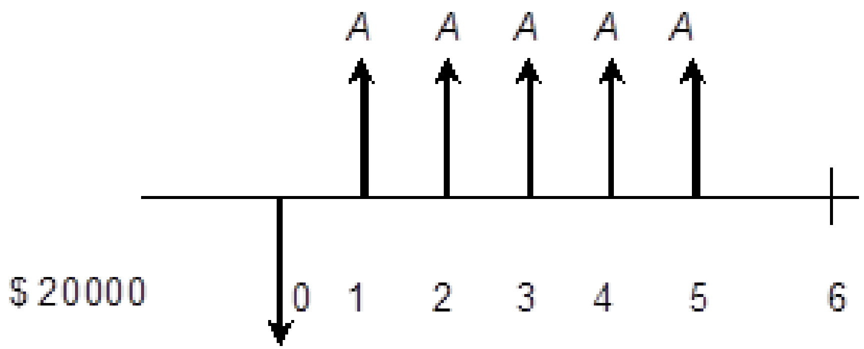

Рисунок 5. Схема метода депозитной книжки

Метод депозитной книжки

Решение (продолжение)

Для лучшего понимания логики метода депозитной книжки целесообразно рассуждать с позиции кредитора.

Для банка данный контракт представляет собой инвестицию в размере 20 000 долл., т.е. отток денежных средств, что и показано на рисунке 5.
В дальнейшем в течение пяти лет банк будет ежегодно получать в конце года сумму A, причем каждый годовой платеж будет включать проценты за истекший год и часть основной суммы долга.
Поскольку в течение первого года заемщик пользовался ссудой в размере 20 000 долл., то платеж, который будет сделан в конце этого года, состоит из двух частей: процентов за год в сумме 2 600 долл. (13% от 20 000 долл.) и погашаемой части долга в сумме (A – 2 600) долл.
В следующем году расчет будет повторен при условии, что размер кредита, которым пользуется заемщик, составит уже меньшую сумму по сравнению с первым годом, а именно: (20 000 – A + 2 600) долл.

Метод депозитной книжки

Решение (продолжение)

Отсюда видно, что с течением времени сумма уплачиваемых процентов снижается, а доля платежа в счет погашения долга возрастает.
Из рисунка 5 видно, что мы имеем дело с аннуитетом постнумерандо, о котором известны его текущая стоимость, процентная ставка и продолжительность действия. Поэтому для нахождения величины годового платежа *A* можно воспользоваться формулами (4) и (6):

По формуле (4):

$$20\ 000 = A \cdot \frac{1-(1+0{,}13)^{-5}}{0{,}13},$$ т. е. $A = 5\ 686$ $

Метод депозитной книжки

Решение (продолжение)

Динамика платежей показана в таблице 1. Отметим, что данные в ходе вычислений округлялись, поэтому величина процентов в последней строке найдена балансовым методом.

Таблица 1. Метод депозитной книжки

Год	Остаток ссуды на начало года	Сумма годового платежа	В том числе		Остаток ссуды на конец года
			проценты за год	погашенная часть долга	
1	20000	5687	2600	3087	16913
2	16913	5687	2199	3488	13425
3	13425	5687	1745	3942	9483
4	9483	5687	1233	4454	5029
5	5029	5687	658	5029	0

Данная таблица позволяет ответить на целый ряд дополнительных вопросов, представляющих определенный интерес для прогнозирования денежных потоков. В частности, можно рассчитать общую сумму процентных платежей, величину процентного платежа в k-м периоде, долю кредита, погашенную в первые k лет, и т. д.

Спасибо за внимание!