Деление многочленов с остатком. Выделение целой части рациональной дроби.

Многочлен $F(x)$ можно разделить на многочлен $G(x) \neq 0$ с остатком. Под этим понимают, что $F(x)$ можно представить в таком виде: $F(x) = G(x) \cdot Q(x) + R(x)$, где степень остатка $R(x)$ строго меньше степени делителя $G(x)$: $\deg R < \deg G$ (или остаток равен нулю). Возможность такого представления следует из алгоритма «деления углом», который аналогичен делению целых чисел «столбиком». Покажем этот алгоритм на примере

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & +\,4x^3 & -\,2x^2 & +\,5x & +\,1 & \;x^2 + x - 2 \\ \cline{6-6}
x^4 & +\,x^3 & -\,2x^2 & & & \;x^2 + 3x - 3 \\ \cline{1-3}
 & 3x^3 & & +\,5x & +\,1 & \\
 & 3x^3 & +\,3x^2 & -\,6x & & \\ \cline{1-5}
 & & -3x^2 & +\,11x & +\,1 & \\
 & & -3x^2 & -\,3x & +\,6 & \\ \cline{3-5}
 & & & 14x & -\,5 &
\end{array}
$$

$F(x) = x^4 + 4x^3 - 2x^2 + 5x + 1,$

$G(x) = x^2 + x - 2,$

$Q(x) = x^2 + 3x - 3,$

$R(x) = 14x - 5,$

$F(x) = G(x)Q(x) + R(x);$

$\deg R = 1$; $\deg G = 2$, т.е. $\deg R < \deg G$

Особенно часто приходится делить на двучлен первой степени $G(x) = x - a$. Остаток при делении на двучлен должен иметь степень, меньшую 1, т. е. быть константой.

Деление многочленов с остатком полезно для выделения целой части рациональной дроби, т. е. представления дроби $\frac{F(x)}{G(x)}$ в виде суммы многочлена и правильной дроби, у которой степень числителя меньше степени знаменателя:

$$\frac{F(x)}{G(x)} = \frac{G(x)\cdot Q(x)+R(x)}{G(x)} = Q(x)+\frac{R(x)}{G(x)},\ \deg R < \deg G.$$

Примеры

1) $\frac{3x+2}{x+1} = \frac{3x+3-1}{x+1} = 3-\frac{1}{x+1}$,

2) $\frac{x^3}{x^2+x+1}$.

Делим x^3 на $x^2 + x + 1$ с остатком; $x^3 = (x - 1)(x^2 + x + 1) + 1$.

$$\frac{x^3}{x^2+x+1} = x-1+\frac{1}{x^2+x+1}.$$

Задачи «Деление многочленов с остатком»

Разделите многочлен $f(x)$ на многочлен $g(x)$. Укажите неполное частное $h(x)$ и остаток $r(x)$, связанные друг с другом соотношением $f(x) = g(x)\, h(x) + r(x)$. Степень остатка $r(x)$ должна быть меньше степени делителя $g(x)$.

1) $f(x) = x^4 + x^3 + x - 2$, $g(x) = x^2 + 1$;

2) $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6$, $g(x) = x^2 - 3x + 1$;

3) $f(x) = x^4 - 1$, $g(x) = x + 2$;

4) $f(x) = x^5 + 3x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 3x + 4$, $g(x) = x + 1$.

Ответы:

1) $h(x) = x^2 + x$, $r(x) = -x - 2$.

2) $h(x) = 2x^2 + 3x + 11$, $r(x) = 25x - 5$.

3) $h(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 8$, $r(x) = 15$.

4) $h(x) = x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 5x + 3$, $r(x) = 0$.

Наибольший общий делитель двух многочленов

Для многочленов, так же, как и для целых чисел, можно определить понятия наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного. Будем и далее предполагать, что коэффициенты при старших степенях равны 1.

Многочлен $Q(x)$ называется общим делителем многочленов $F(x)$ и $G(x)$, если $F(x)$ делится на $Q(x)$ и $G(x)$ делится на $Q(x)$. Среди всех общих делителей найдется делитель наибольшей степени. Он называется наибольшим общим делителем (НОД) многочленов $F(x)$ и $G(x)$. Для нахождения НОД применяется тот же алгоритм Евклида.

Пример. Пусть $F(x) = x^4 - x^2$; $G(x) = x^4 - 1$. Тогда

Шаг 1. Делим $F(x)$ на $G(x)$ с остатком, т. е. представляем $F(x)$ в виде

$$F(x) = G(x) + 1 - x^2 \Rightarrow R(x) = 1 - x^2$$

Шаг 2. Делим $G(x)$ на $R(x)$: $x^4 - 1 = (x^2+1)(1-x^2)+0 = -(x^2+1)(x^2-1)+0$.
Многочлен $G(x)$ разделился на $R(x)$ без остатка, поэтому последний ненулевой остаток x^2-1 и является НОД многочленов $F(x)$ и $G(x)$

Аналогично тому, как это делалось для целых чисел, определяется наименьшее общее кратное (НОК) для многочленов $F(x)$ и $G(x)$. Это многочлен наименьшей степени, который делится и на $F(x)$ и на $G(x)$.